



多旋翼飞行器设计与控制 实践

第六讲 动态建模实验

全权 副教授

qq_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学

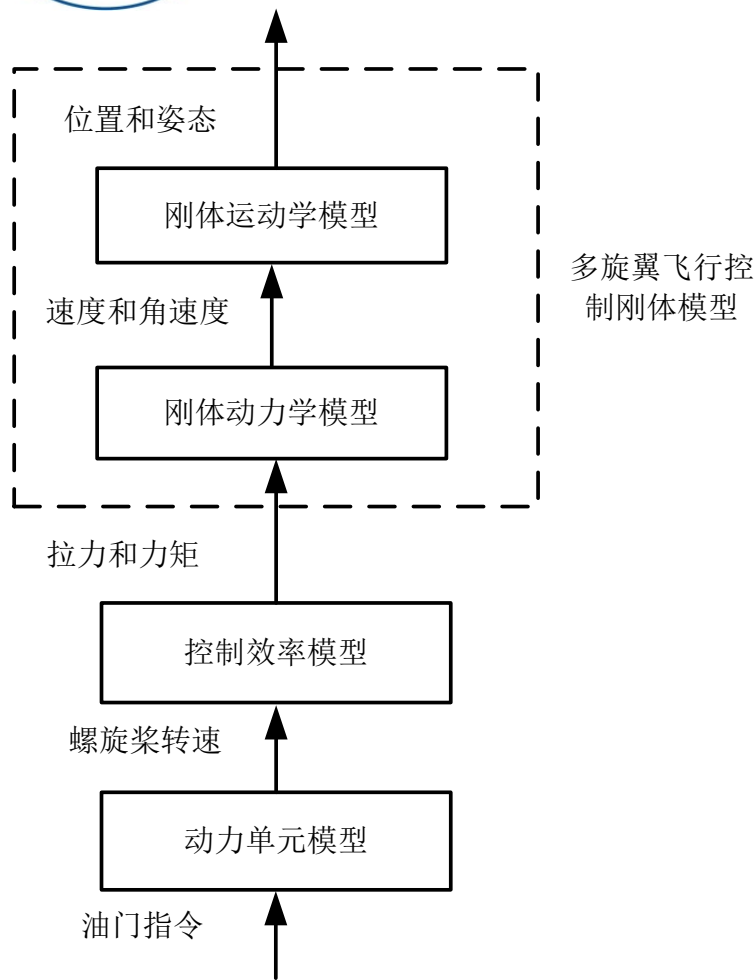


大纲

1. 实验原理
2. 基础实验
3. 分析实验
4. 设计实验
5. 小结



实验原理



(1) 刚体运动学模型。跟质量与受力无关，只研究位置、速度、姿态、角速度等参量，常以质点为模型。

(2) 刚体动力学模型。它与一般刚体动力学模型最大的不同是，拉力方向始终与机体轴 z_b 轴的负方向一致。

(3) 控制效率模型。六旋翼和四旋翼的区别，就在这个控制效率模型上。

(4) 动力单元模型。以无刷直流电机、电调和螺旋桨为一组的整个动力机构。输入是0~1的电机油门指令，输出是螺旋桨转速。

图. 多旋翼的建模流程图



实验原理

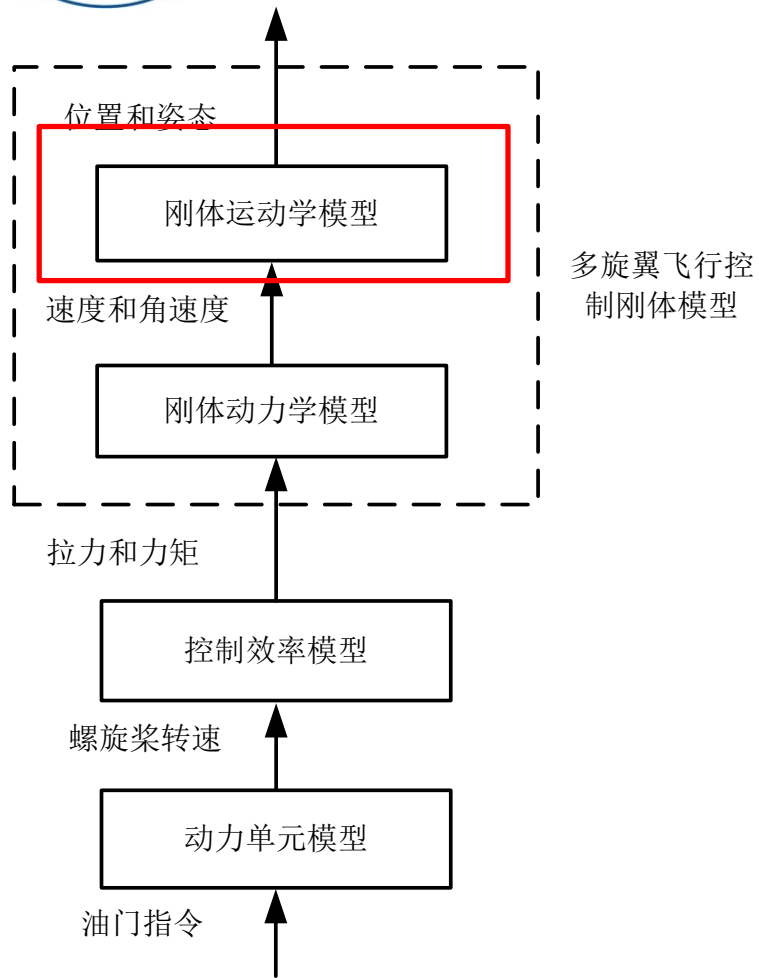


图. 多旋翼的建模流程图

■ 基于欧拉角模型

$$\begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ \dot{\Theta} &= \mathbf{W}^b \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

■ 基于旋转矩阵模型

$$\begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{R} \left[{}^b \boldsymbol{\omega} \right]_x \end{aligned}$$

■ 基于四元数模型

$$\begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ \dot{q}_0 &= -\frac{1}{2} \mathbf{q}_v^T \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{q}}_v &= \frac{1}{2} \left(q_0 \mathbf{I}_3 + [\mathbf{q}_v]_x \right) {}^b \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$



实验原理

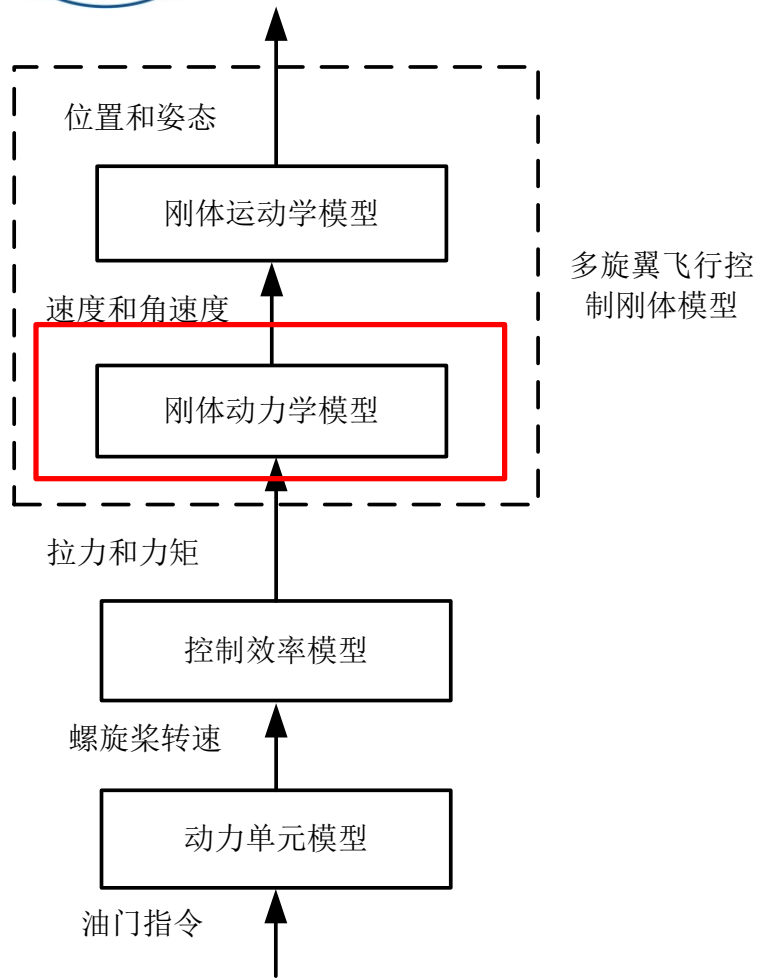


图. 多旋翼的建模流程图

■ 惯性系下的位置动力学模型

$${}^e \dot{\mathbf{v}} = {}^e \mathbf{F} / m$$

${}^e \mathbf{F}$ 由重力，螺旋桨拉力以及空气动力三个部分组成

其中

$${}^e \mathbf{F} = m\mathbf{G} + \mathbf{R}({}^b \mathbf{T} + {}^b \mathbf{F}_d)$$

重力 $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g \end{bmatrix}^T = g\mathbf{e}_3$

空气动力

${}^b \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -f \end{bmatrix}^T = -f\mathbf{b}_3$

螺旋桨拉力, f 代表螺旋桨拉力总大小, 并且这里拉力方向是单向的



实验原理

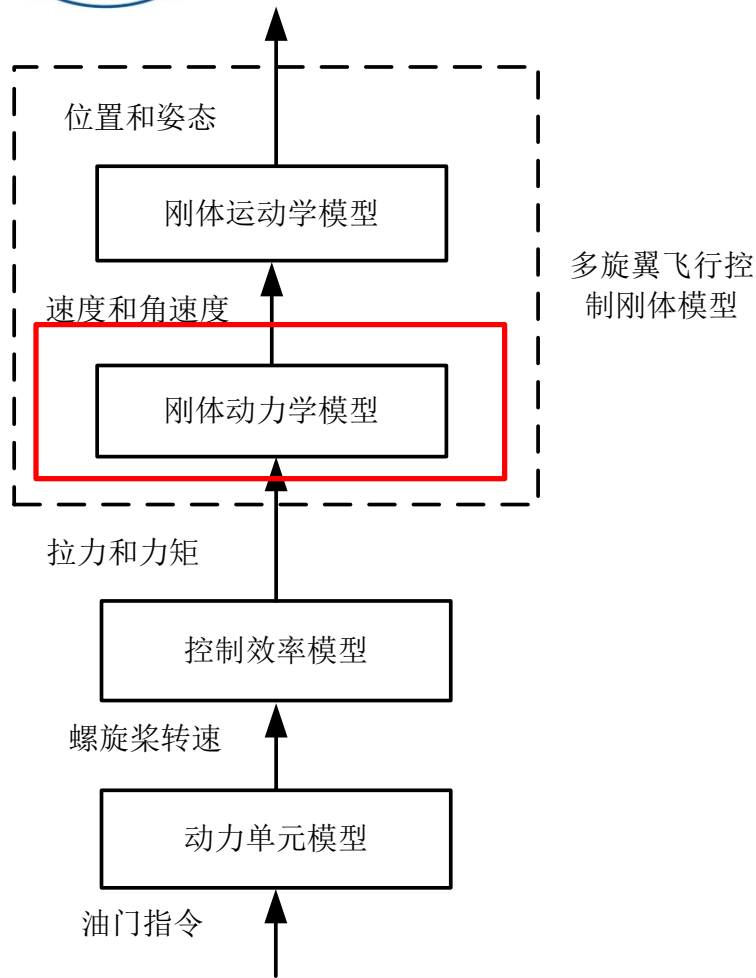


图. 多旋翼的建模流程图

■ 姿态动力学模型

在机体坐标系建立多旋翼姿态动力学方程如下

$$\mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} = -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + {}^b \mathbf{M}$$

$${}^b \mathbf{M} = \mathbf{G}_a + \boldsymbol{\tau} + {}^b \mathbf{M}_d$$

其中 $\boldsymbol{\tau} \triangleq [\tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]^T \in \mathbb{R}^3$ 表示螺旋桨在机体轴上产生的力矩， $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 表示多旋翼的转动惯量。

$\mathbf{G}_a \triangleq [G_{a,\phi} \quad G_{a,\theta} \quad G_{a,\psi}] \in \mathbb{R}^3$ 表示陀螺力矩，

${}^b \mathbf{M}_d \in \mathbb{R}^3$ 表示气动力矩。



实验原理

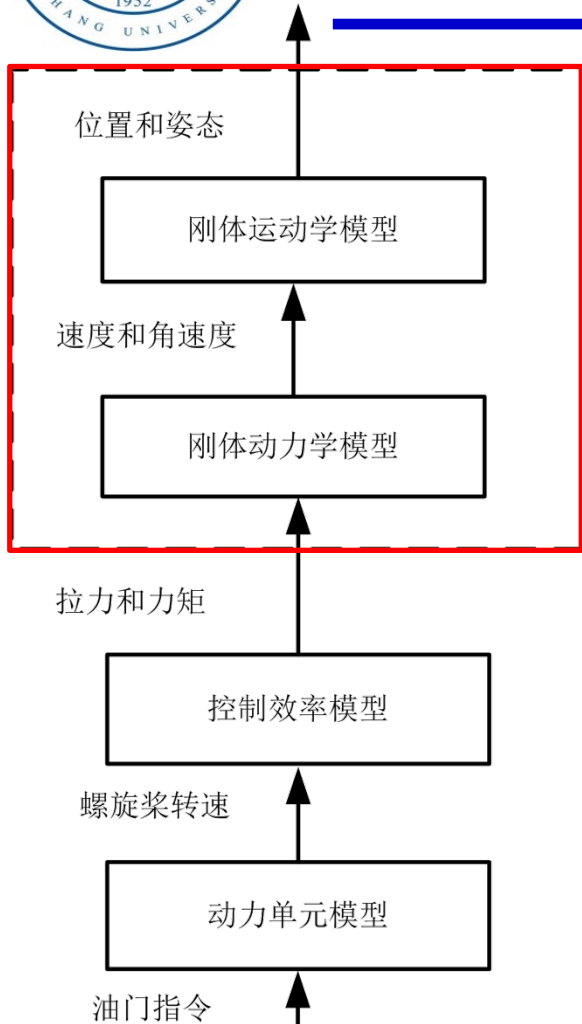


图. 多旋翼的建模流程图

多旋翼飞行控制
刚体模型

■ 基于欧拉角模型

$$\left\{ \begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} = \mathbf{R} \cdot {}^b \mathbf{v} \\ {}^b \dot{\mathbf{v}} &= -\left[{}^b \boldsymbol{\omega} \right]_x \cdot {}^b \mathbf{v} + {}^b \mathbf{F}/m \\ \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{R} \cdot \left[{}^b \boldsymbol{\omega} \right]_x \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} &= -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + {}^b \mathbf{M} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} = \mathbf{R} \cdot {}^b \mathbf{v} \\ {}^b \dot{\mathbf{v}} &= -\left[{}^b \boldsymbol{\omega} \right]_x \cdot {}^b \mathbf{v} + {}^b \mathbf{F}/m \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \mathbf{W} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} &= -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + {}^b \mathbf{M} \end{aligned} \right.$$

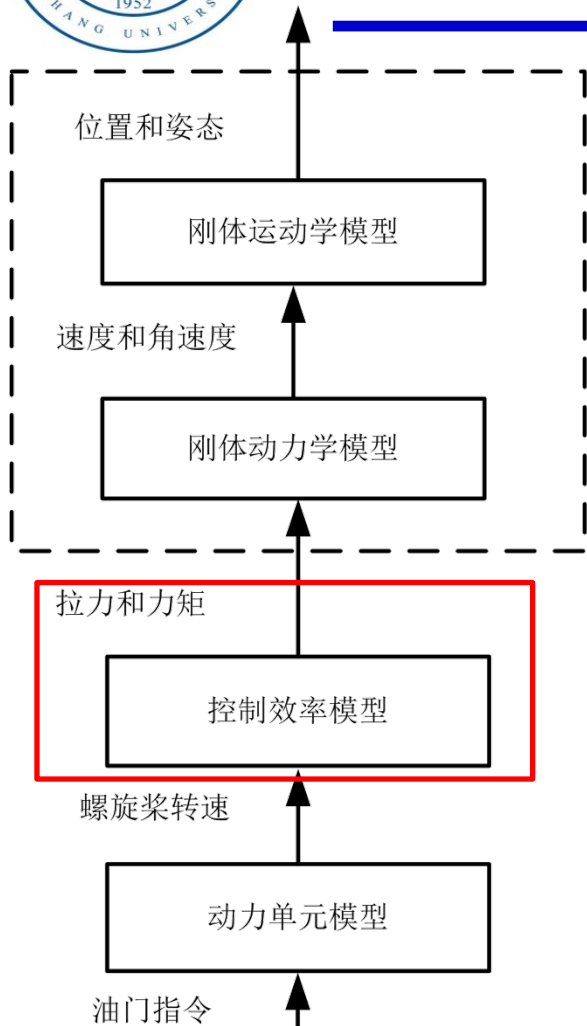
■ 基于旋转矩阵模型

$$\left\{ \begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} = \mathbf{R} \cdot {}^b \mathbf{v} \\ {}^b \dot{\mathbf{v}} &= -\left[{}^b \boldsymbol{\omega} \right]_x \cdot {}^b \mathbf{v} + {}^b \mathbf{F}/m \\ \dot{q}_0 &= -\frac{1}{2} \mathbf{q}_v^T \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{q}}_v &= \frac{1}{2} (q_0 \mathbf{I}_3 + [\mathbf{q}_v]_x) {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} &= -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + {}^b \mathbf{M} \end{aligned} \right.$$

■ 基于四元数模型



实验原理



■ 标准四旋翼

作用在机体上的总拉力为

$$f = \sum_{i=1}^4 T_i = c_T (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$$

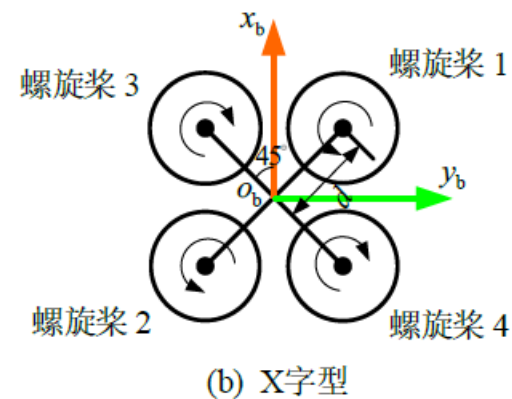
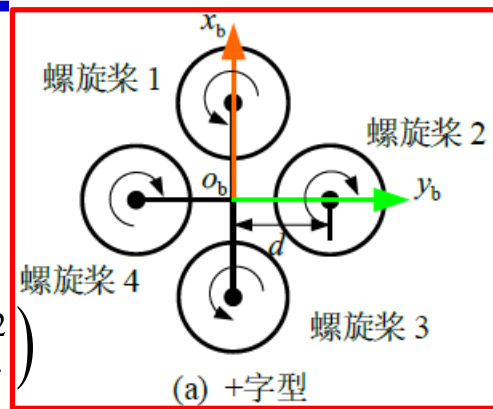
对于+字形四旋翼，螺旋桨产生力矩为

$$\tau_x = dc_T (-\omega_2^2 + \omega_4^2)$$

$$\tau_y = dc_T (\omega_1^2 - \omega_3^2)$$

$$\tau_z = c_M (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2)$$

其中 $c_T = \frac{1}{4\pi^2} \rho D_p^4 C_T, c_M = \frac{1}{4\pi^2} \rho D_p^5 C_M$

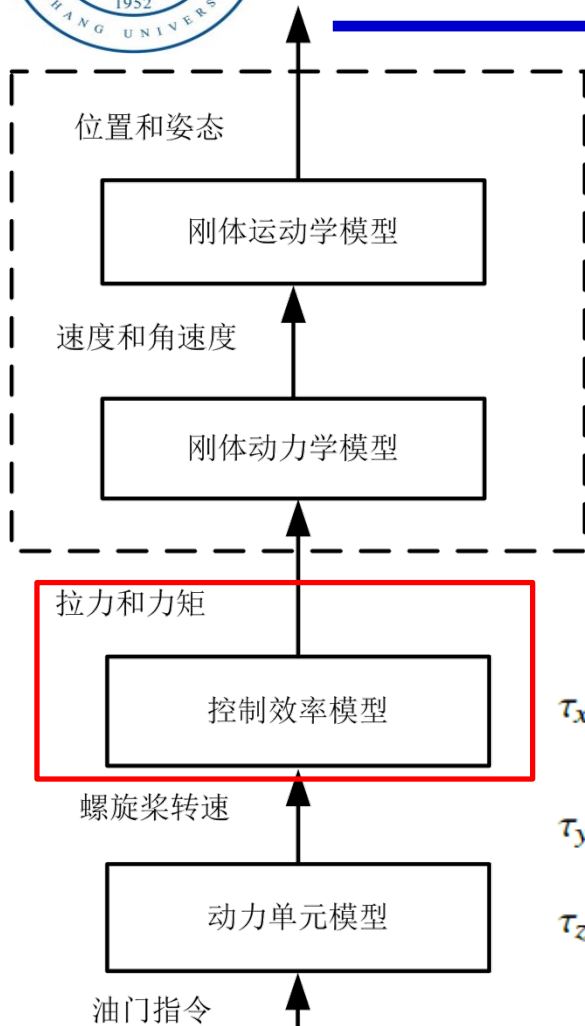


$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_T & c_T & c_T & c_T \\ 0 & -dc_T & 0 & dc_T \\ dc_T & 0 & -dc_T & 0 \\ c_M & -c_M & c_M & -c_M \end{bmatrix}}_{M_4} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}$$

图. 多旋翼的建模流程图



实验原理



■ 标准四旋翼

作用在机体上的总拉力为

$$f = \sum_{i=1}^4 T_i = c_T (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$$

对于X字形四旋翼，螺旋桨产生力矩为

$$\begin{aligned} \tau_x &= dc_T \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \omega_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_2^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_3^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_4^2 \right) \\ \tau_y &= dc_T \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \omega_1^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_2^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_3^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_4^2 \right) \\ \tau_z &= c_M (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 - \omega_4^2). \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_T & c_T & c_T & c_T \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & \frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & \frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & -\frac{\sqrt{2}}{2} dc_T \\ \frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & -\frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & \frac{\sqrt{2}}{2} dc_T & -\frac{\sqrt{2}}{2} dc_T \\ c_M & c_M & -c_M & -c_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}$$

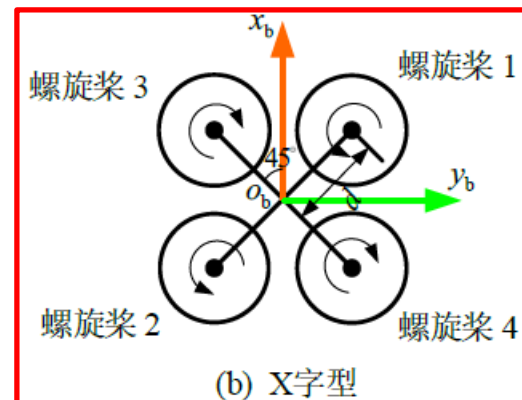
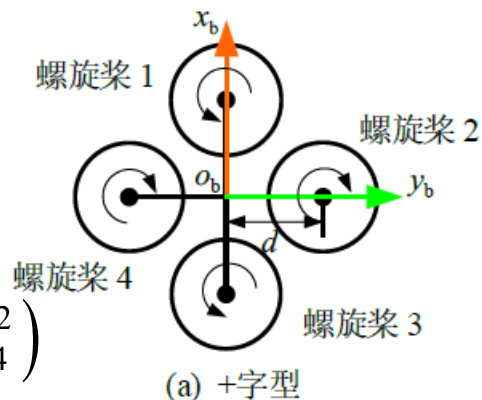
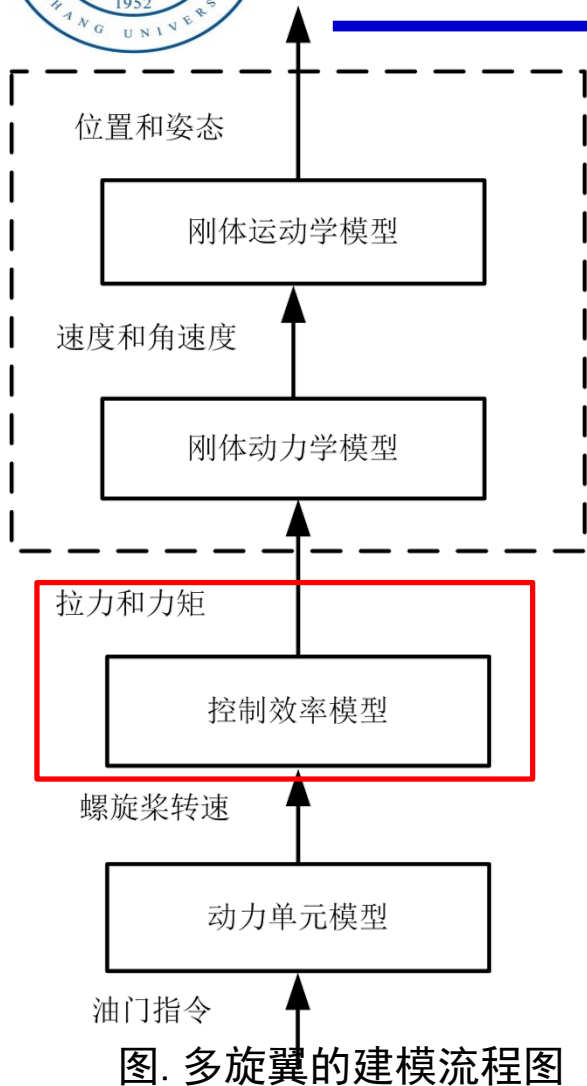


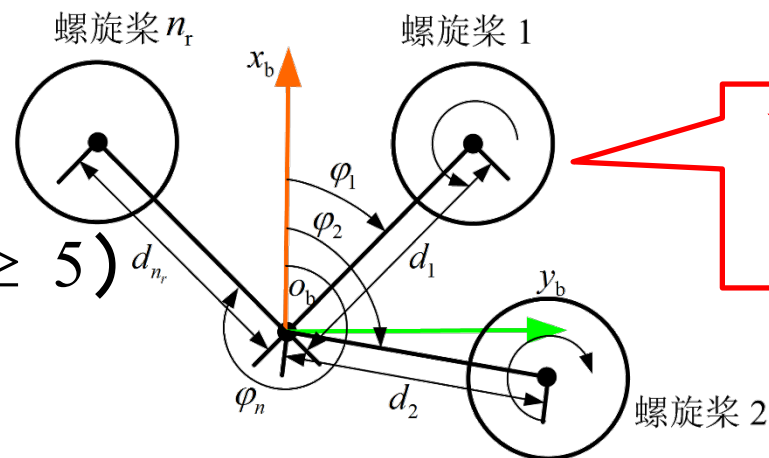
图. 多旋翼的建模流程图



实验原理



任意多旋翼 ($n_r \geq 5$)



$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_T & c_T & \cdots & c_T \\ -d_1 c_T \sin \varphi_1 & -d_2 c_T \sin \varphi_2 & \cdots & -d_{n_r} c_T \sin \varphi_{n_r} \\ d_1 c_T \cos \varphi_1 & d_2 c_T \cos \varphi_2 & \cdots & d_{n_r} c_T \cos \varphi_{n_r} \\ c_M \delta_1 & c_M \delta_2 & \cdots & c_M \delta_{n_r} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_{n_r}} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \vdots \\ \omega_{n_r}^2 \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{M}_{n_r} \in \mathbb{R}^{4 \times n_r}$, $\delta_i = (-1)^{i+1}$, $i = 1, \dots, n_r$



实验原理

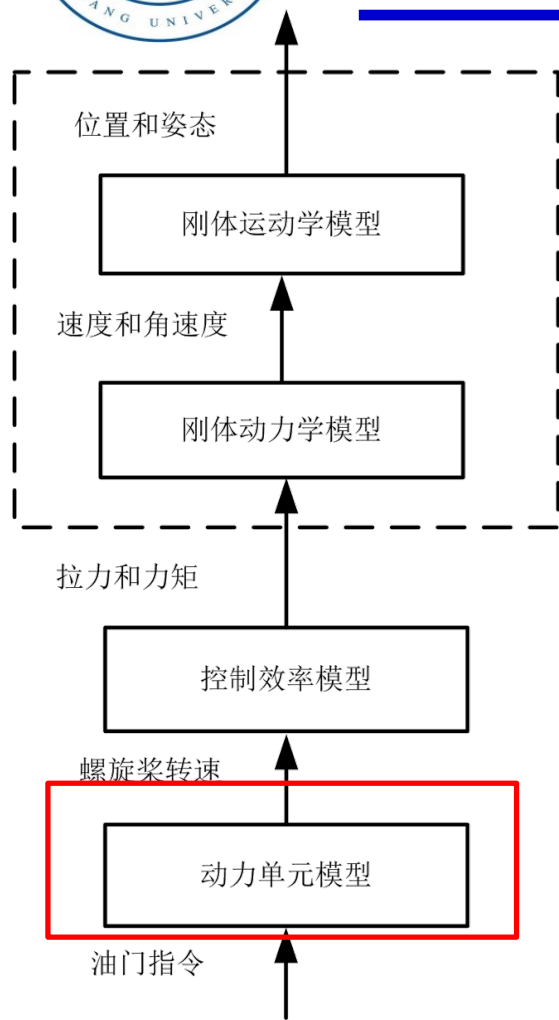


图. 多旋翼的建模流程图

动力单元模型

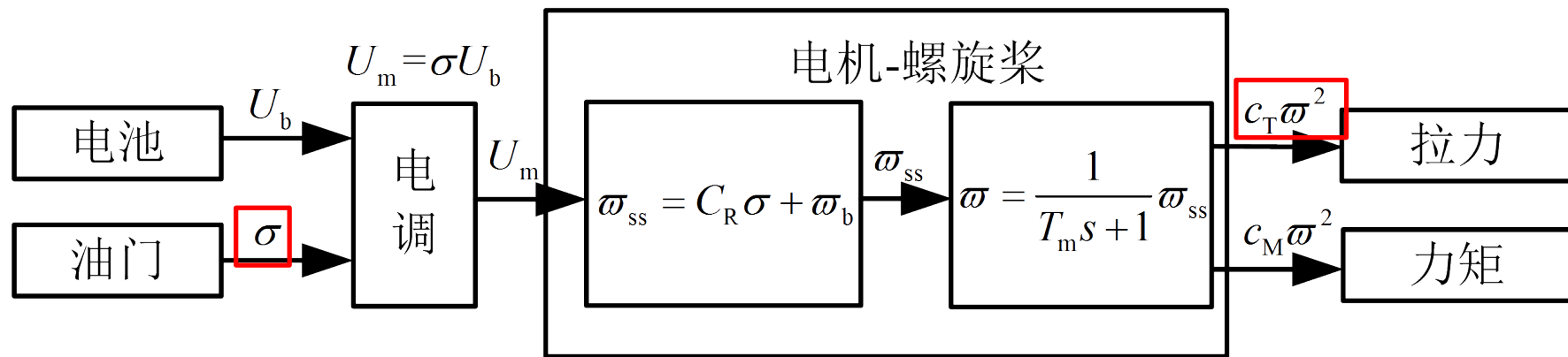


图. 动力系统信号传递图

完整的动力单元模型

$$\omega = \frac{1}{T_m s + 1} (C_R \sigma + \omega_b)$$

其中电机油门 σ 为输入，电机转速 ω 为输出， T_m 为电机的动态响应常数。



实验原理

■ 空气动力学模型

周围空气相对机体的流动速度为

$${}^b \mathbf{v}_a = -{}^b \mathbf{v} + \mathbf{R}_e^b \cdot {}^e \mathbf{w} = -{}^b \mathbf{v} + \mathbf{R}_b^{e-1} \cdot {}^e \mathbf{w}$$

其中， ${}^e \mathbf{w}$ 为定义在地球坐标系中风速，相对气流速度 ${}^b \mathbf{v}_a$ 定义为机体运动速度和当地风速之差。风速向量 ${}^e \mathbf{w}$ 由多个风场叠加而成。

令相对气流速度速度 ${}^b \mathbf{v}_a \triangleq [u \quad v \quad w]^T$ ，相对空气转速 ${}^b \boldsymbol{\omega}_a \approx {}^b \boldsymbol{\omega} \triangleq [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ ，空气动力和力矩都近似于速度 ${}^b \mathbf{v}_a$ 和角速度 ${}^b \boldsymbol{\omega}$ 的平方成正比

$${}^b \mathbf{F}_d = C_d \begin{bmatrix} -u |u| \\ -v |v| \\ -w |w| \end{bmatrix}, \mathbf{M}_d = C_{dm} \begin{bmatrix} -\omega_x |\omega_x| \\ -\omega_y |\omega_y| \\ -\omega_z |\omega_z| \end{bmatrix}$$

其中 C_d 为空气阻尼系数， C_{dm} 为阻尼力矩系数。



实验原理

以上原理可以详细参考“Quan Quan. *Introduction to Multicopter Design and Control*. Springer, Singapore, 2017”或者“全权著. 杜光勋, 赵峙尧, 戴训华, 任锦瑞, 邓恒译. 《多旋翼飞行器设计与控制》, 电子工业出版社, 2018.”的第5-6章。



基础实验

□ 实验目标

■ 已知

软件：MATLAB 2017b或以上版本，实验指导包“e2.1”（下载地址：<https://rflysim.com/course>）。

■ 目标

分析多旋翼总质量、转动惯量矩阵、螺旋桨推力系数、螺旋桨拉力系数对整个多旋翼飞行性能产生的影响。



基础实验

□ 实验步骤

(1) 总质量对飞行影响

1) 打开文件

“e2\e2.1\e2_1.slx”，如图所示。打开“e2\e2.1\Init_control.m”文件并运行程序对参数进行初始化。

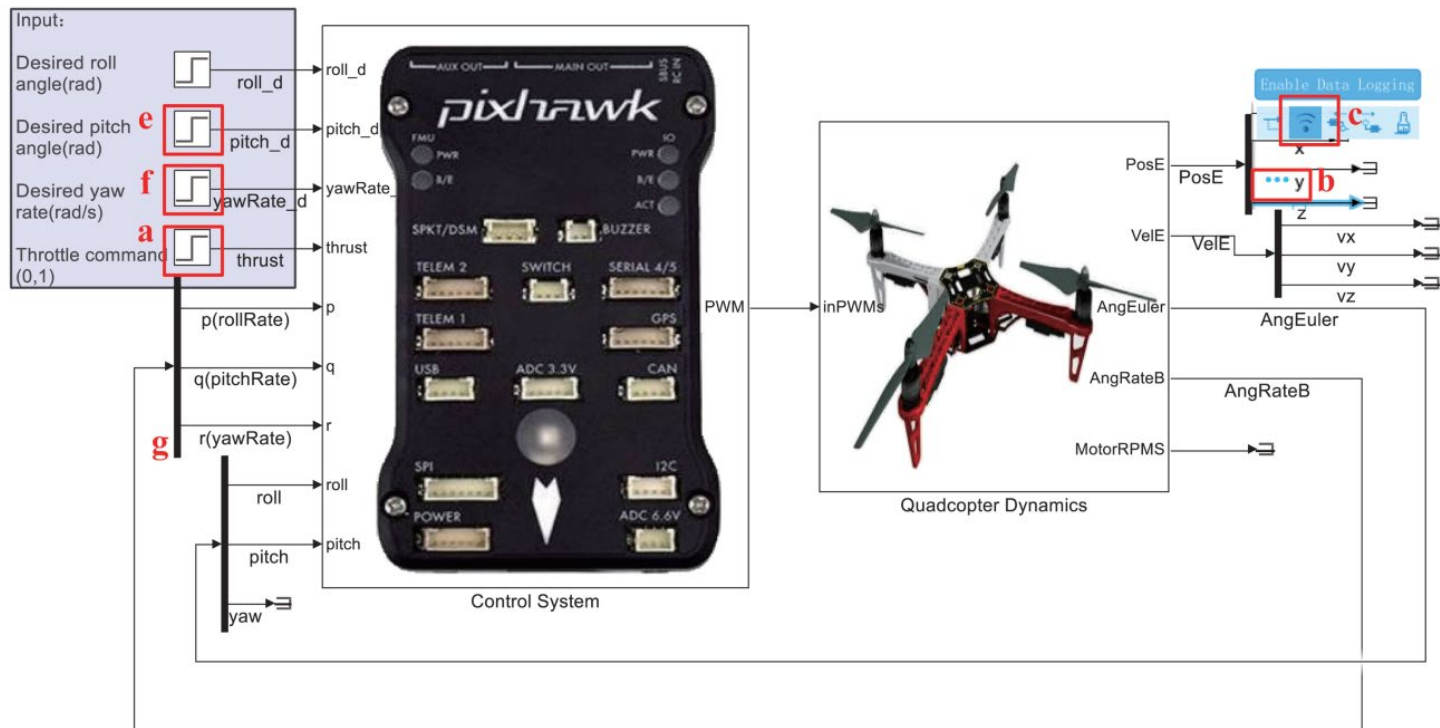


图. 多旋翼模型



基础实验

□ 实验步骤

(1) 总质量对飞行影响

2) 油门对高度响应的影响

将模型位置z方向输出设置为“Enable Data Logging”，得到z近似保持不变的油门值。当质量为1.4kg，“thrust”输入为0.6085时飞行器可以近似保持悬停状态，如右图所示。

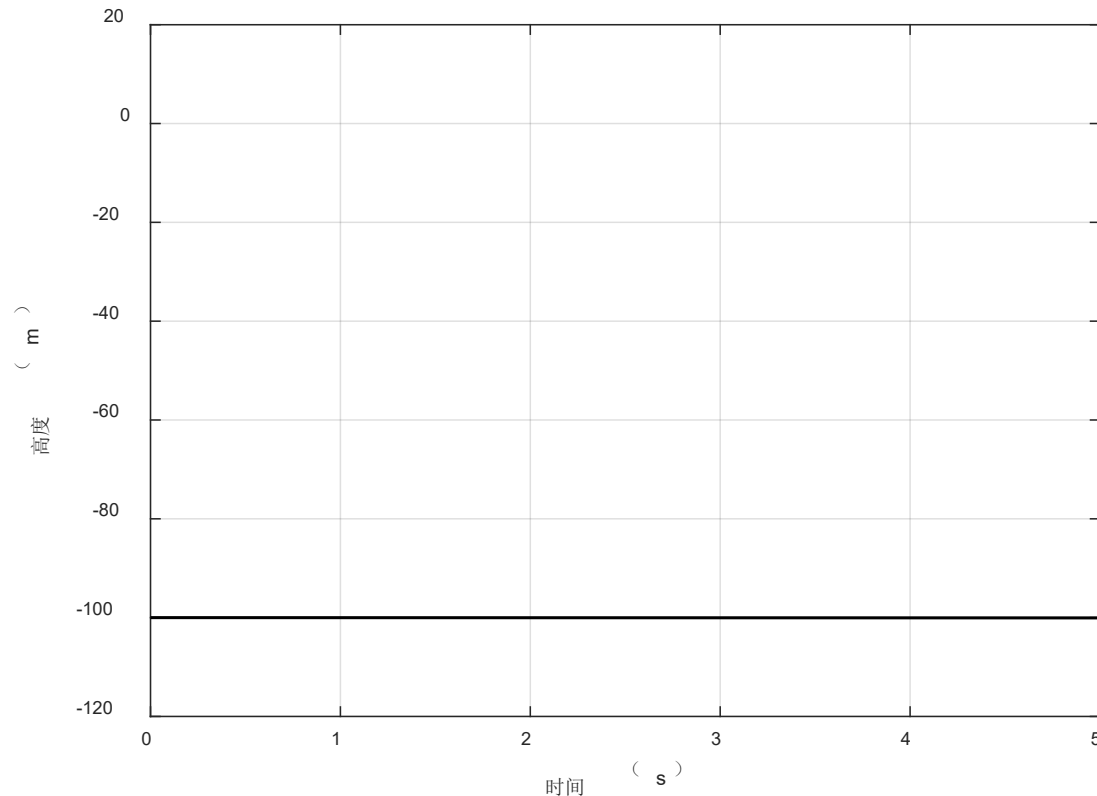


图. m=1.4kg高度响应



基础实验

□ 实验步骤

(1) 总质量对飞行影响

3) 修改多旋翼质量，观察质量对高度响应影响

将“Init_control.m”文件中的

“ModelParam_uavMass” 参数改为2.0。如右图所示，在相同油门输入时，飞行器高度在下降。由于重力增加，相同的油门输入已经无法提供的足够的升力使多旋翼保持悬停状态。

当质量为2kg时，“thrust”的输入为0.7032，多旋翼可以保持悬停。

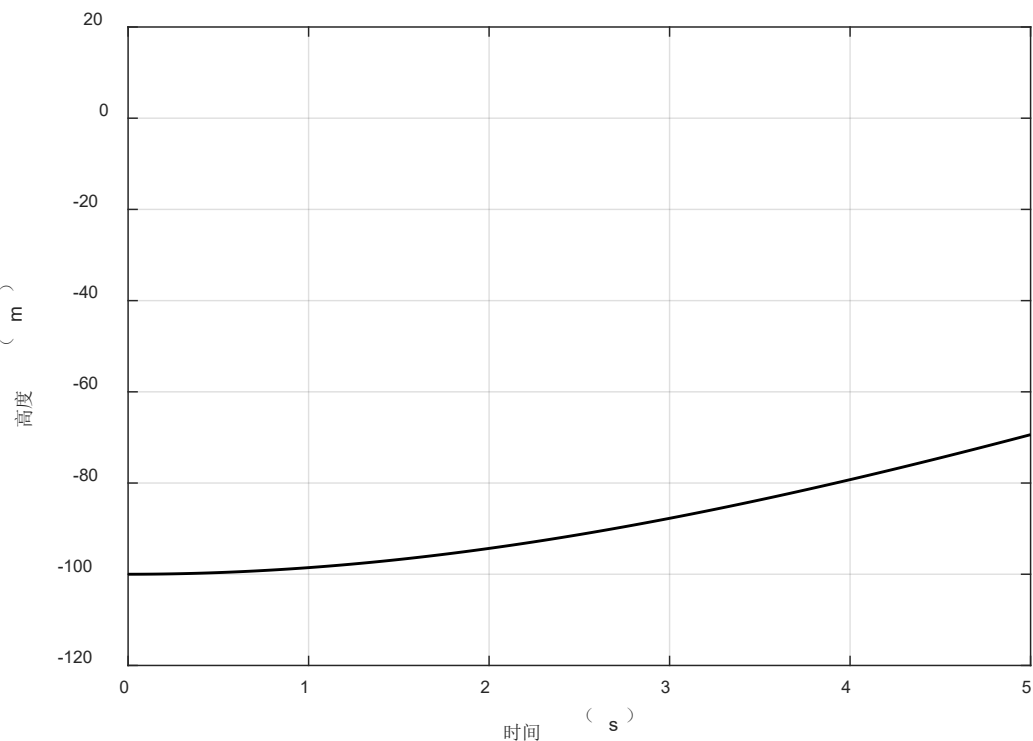


图. $m=2.0\text{kg}$ 高度响应



基础实验

□ 实验步骤

(1) 总质量对飞行影响

4) 质量对姿态的影响

质量为1.4kg时，将“thrust”输入设置为0.6085，将“pitch_d”设置为0.2，用示波器观察输出俯仰角。

将质量改为2kg时，将“thrust”输入设置为0.7032。

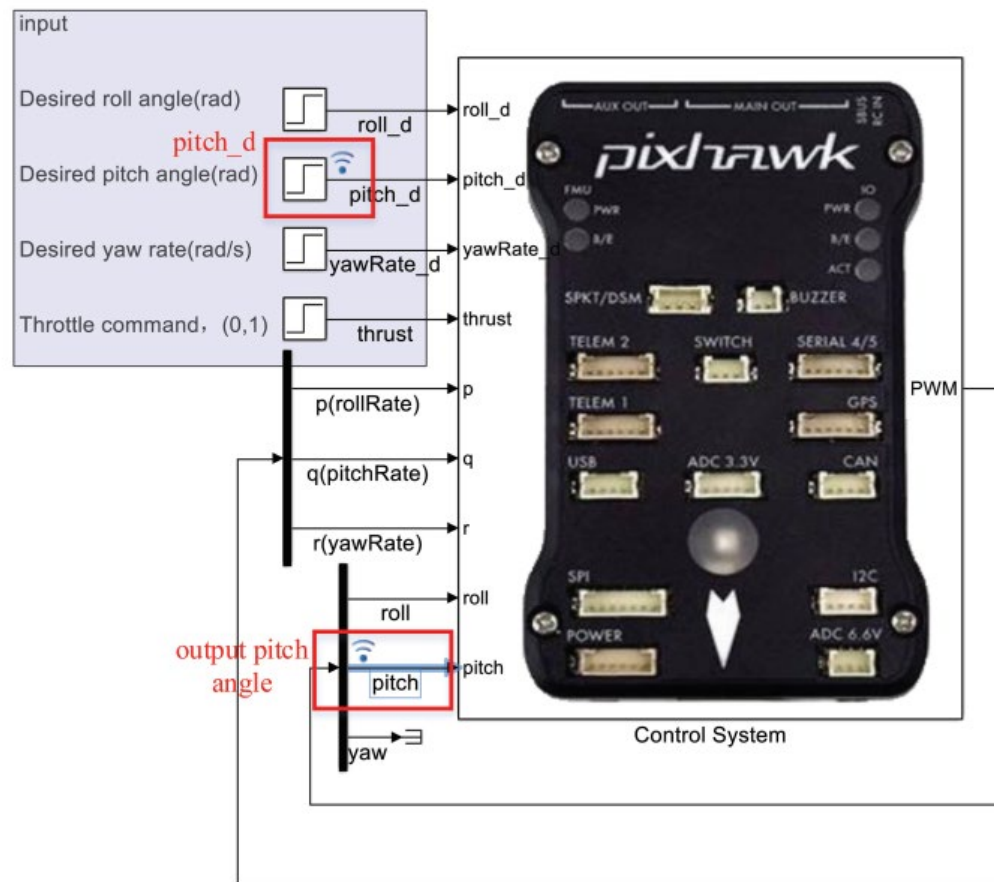


图. 设置输入值和观测信号



基础实验

□ 实验步骤

(1) 总质量对飞行影响

4) 质量对姿态控制的影响

运行模型，得到右图结果。可以看到姿态响应几乎不受影响。

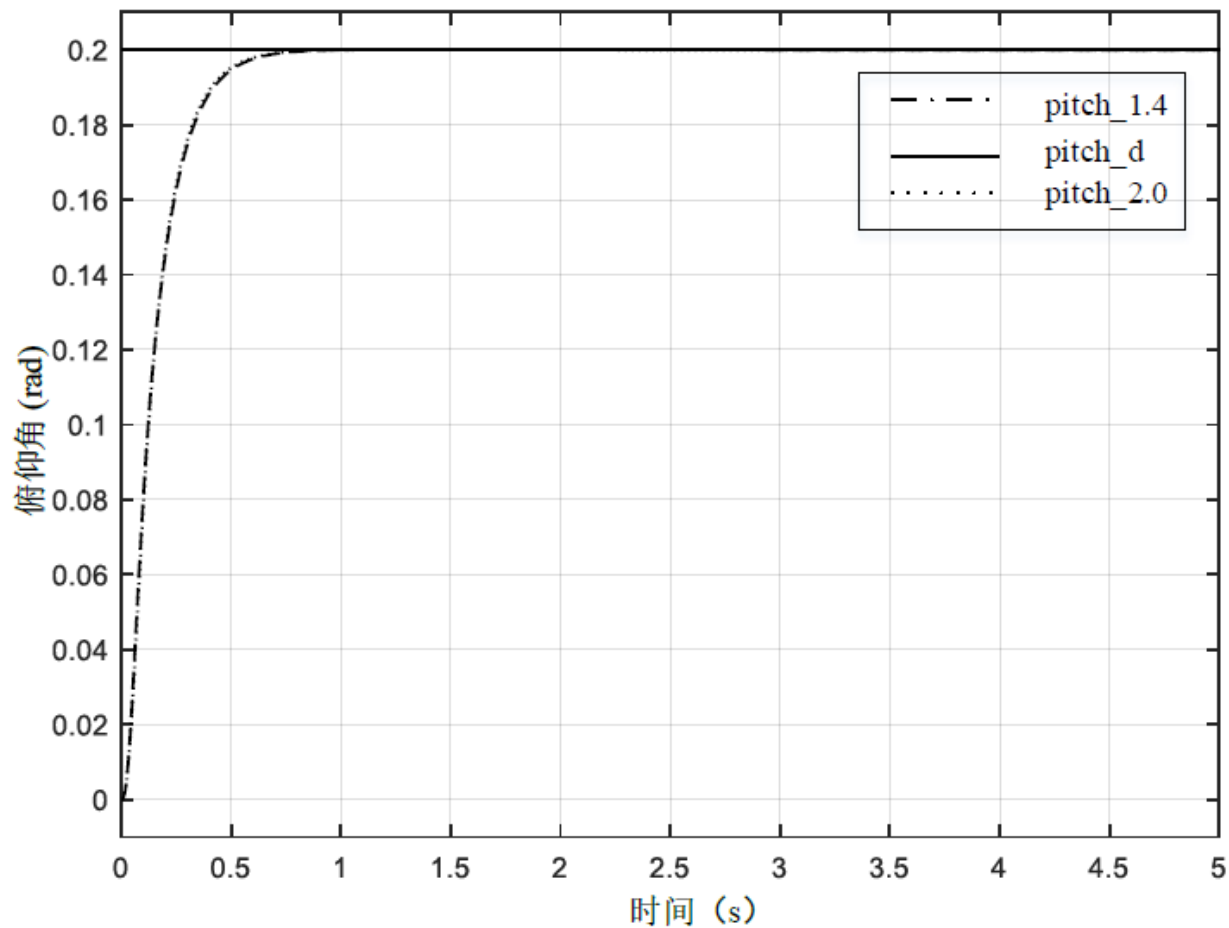


图. 质量对俯仰角影响



基础实验

□ 实验步骤

(2) 转动惯量对偏航角变化率的影响

通过修改“ModelParam_uavJzz”，将 o_bz_b 轴的转动惯量增大到原来的2倍。得到结果如图，“yawrate_d”为期望的偏航角变化率响应，这里设为0.2，“r_1”是“ModelParam_uavJzz”为原始值时偏航角变化率的响应，“r_2”是“ModelParam_uavJzz”变为原来两倍时偏航角变化率的响应。

可以看到 o_bz_b 轴转动惯量增大后系统偏航角变化率响应变慢。

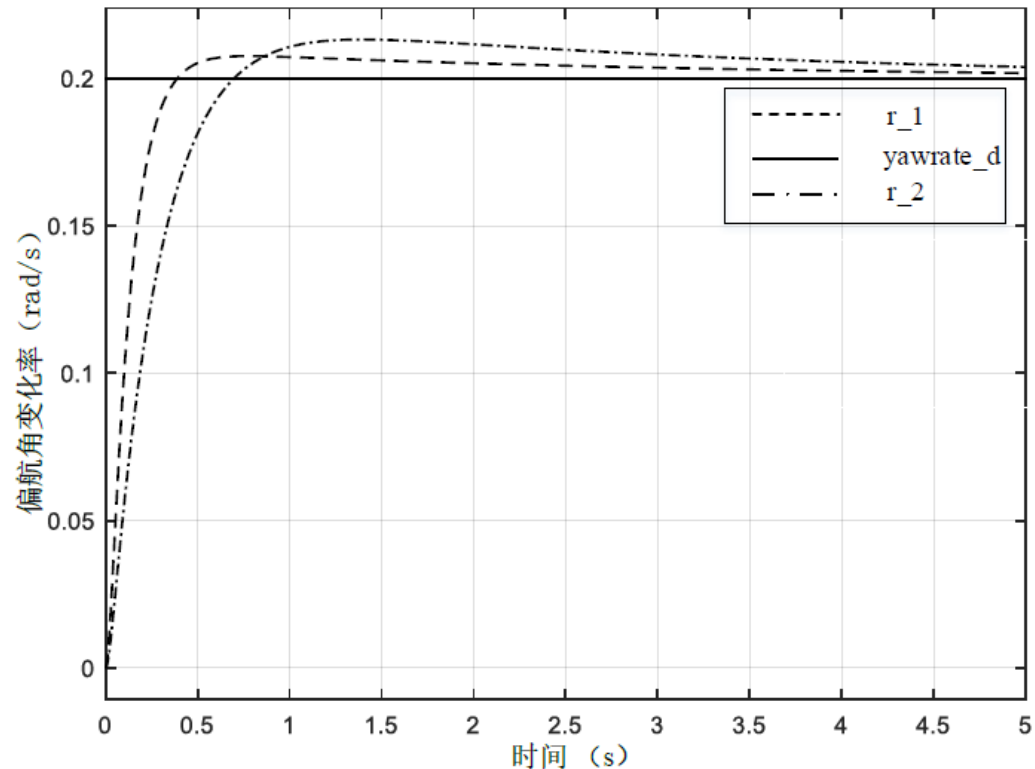


图. o_bz_b 轴转动惯量对偏航角速率响应的影响



基础实验

□ 实验步骤

(3) 螺旋桨拉力系数对多旋翼飞行姿态的影响

拉力系数参数“ModelParam_rotorCt”扩大为原来的2倍。在相同油门指令下，螺旋桨提供的拉力增加，高度响应如图所示。此时，thrust输入为0.3042时，多旋翼可悬停。

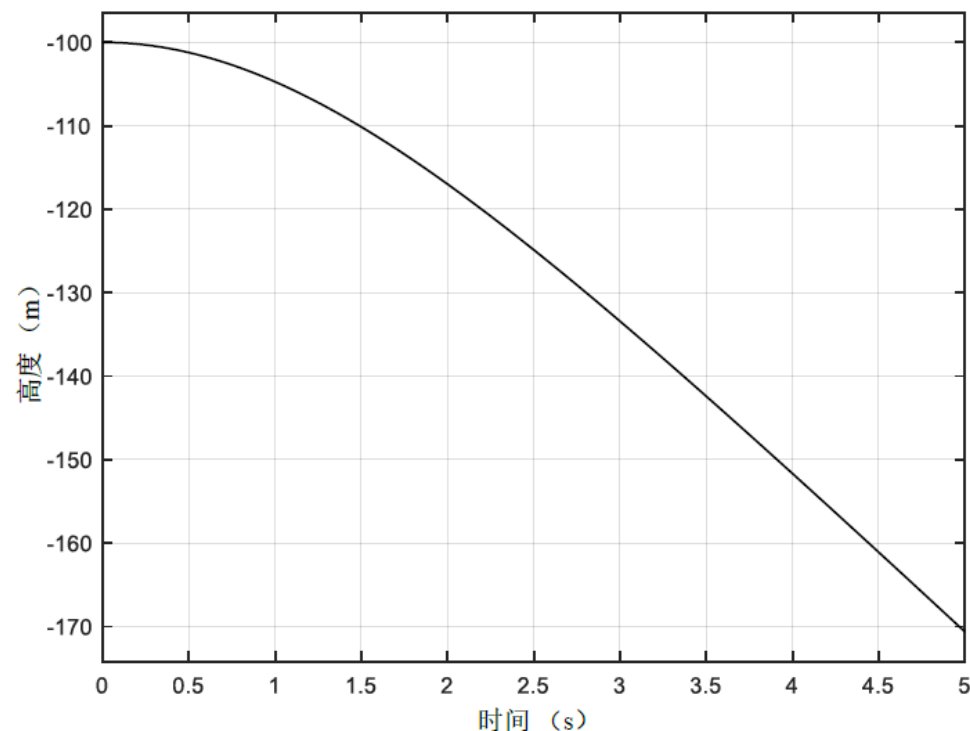


图. 推力系数对高度响应的影响



基础实验

□ 实验步骤

(4) 螺旋桨力矩系数对偏航角变化率的影响

将力矩系数参数“ModelParam.rotorCm”扩大为原来的2倍。得到结果如图，“yawrate_d”为期望的偏航角变化率响应，这里设置为0.2，“r_1”是“ModelParam.rotorCm”为原始值时偏航角变化率的响应，“r_2”是“ModelParam.rotorCm”变为原来两倍时偏航角变化率的响应。

可以看到在相同情况下，**螺旋桨力矩系数越大，偏航角变化率响应变快。**

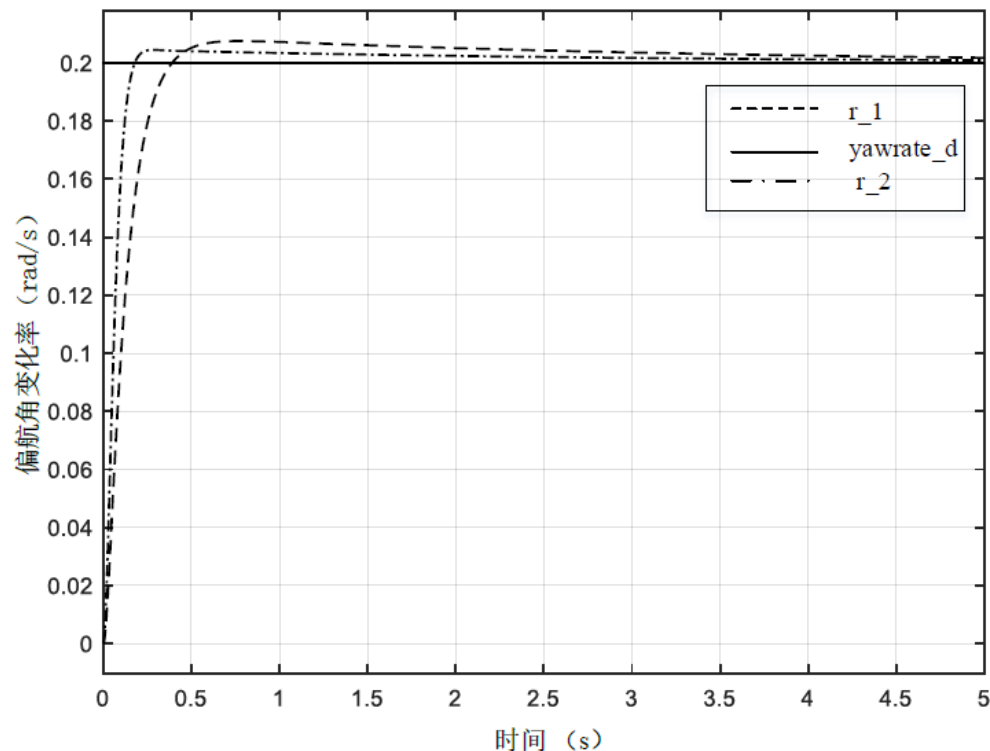


图. 螺旋桨力矩系数对偏航角速率的影响



基础实验

□ 注意事项

在高度变化时，要重新调整油门使其悬停再观察其俯仰响应。



分析实验

□ 实验目标

当一个X字型四旋翼保持悬停时，计算如下动态系统悬停下的平衡点

$$\begin{cases} {}^e \dot{\mathbf{p}} = {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} = {}^e \mathbf{F}/m \\ \dot{\Theta} = \mathbf{W} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} = -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + {}^b \mathbf{M} \end{cases}$$

并写出平衡点的线性化模型，并对比分析基础实验结论的合理性。



分析实验

□ 实验步骤

(1) 步骤一：计算悬停油门指令

在悬停的平衡点处，总拉力等于重力，各电机转速相等，可得：

$$\omega^* = \sqrt{\frac{mg}{4c_T}} = \sqrt{\frac{1.4 \times 9.8}{4 \times 1.105 \times 10^{-5}}} \approx 557.14 \text{ rad/s}$$

进一步，可得悬停油门指令为：

$$\sigma^* = \frac{\omega - \omega_b}{C_R} = \frac{557.14 - (-141.4)}{1148} = 0.6085$$

故悬停时，各电机油门指令应为0.6085。



分析实验

□ 实验步骤

(2) 步骤二：计算在平衡点的线性化模型

1) 简化模型

对于本实验四旋翼系统，在悬停状态应用小扰动假设，有 ${}^e \mathbf{v} \approx \mathbf{0}$ 、 ${}^b \boldsymbol{\omega} \approx \mathbf{0}$ 和 ${}^e \mathbf{w} \approx \mathbf{0}$ ，则可以得到如下简化关系

$$\begin{aligned} -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}^b \boldsymbol{\omega}) &\approx \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_a &\approx \mathbf{0} \\ {}^b \mathbf{M}_d &\approx \mathbf{0} \\ {}^b \mathbf{F}_d &\approx \mathbf{0} \end{aligned}$$

则动态平衡点处的表达式可进行如下转换

$$\left\{ \begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} &= {}^e \mathbf{F}/m \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \mathbf{W} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} &= -{}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + {}^b \mathbf{M} \end{aligned} \right.$$



$$\left\{ \begin{aligned} {}^e \dot{\mathbf{p}} &= {}^e \mathbf{v} \\ {}^e \dot{\mathbf{v}} &= g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}} &= \mathbf{W} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \right.$$



分析实验

□ 实验步骤

考虑平衡点附近俯仰角和滚转角都非常小，总拉力约等于多旋翼重力，则可以做进一步假设 $\sin \phi \approx \phi$, $\cos \phi \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ 和 $\tau \approx \mathbf{0}$ 。

通过在平衡点的小角度线性化，可以得到多旋翼的线性模型。此时 \mathbf{Re}_3 可以简化为：

$$\mathbf{Re}_3 \approx \begin{bmatrix} \theta \cos \psi + \phi \sin \psi \\ \theta \sin \psi - \phi \cos \psi \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此，原始模型可以解耦得到三个线性模型，即水平位置通道模型、高度通道模型和姿态模型。接下来将分别介绍这三个模型。



分析实验

□ 实验步骤

(a) 水平通道模型

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_h &= \dot{\mathbf{v}}_h \\ \dot{\mathbf{v}}_h &= -g\mathbf{A}_\psi \Theta_h\end{aligned}$$

$$\text{其中 } \mathbf{p}_h = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}, \mathbf{A}_\psi = \begin{bmatrix} \sin\psi & \cos\psi \\ -\cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix}, \Theta_h = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix}.$$

在水平通道中，可以认为 Θ_h 是输入。进一步可以得到 $-g\mathbf{A}_\psi$ ，所以可以认为 $-g\mathbf{A}_\psi\Theta_h$ 是输入，而 \mathbf{p}_h 是输出。

(b) 高度通道模型

$$\begin{aligned}\dot{p}_z &= v_z \\ \dot{v}_z &= g - \frac{f}{m}\end{aligned}$$

(c) 姿态模型

$$\begin{aligned}\dot{\Theta} &= {}^b\omega \\ \mathbf{J} \cdot {}^b\dot{\omega} &= \tau\end{aligned}$$



分析实验

□ 实验步骤

1) 悬停状态线性化

当多旋翼悬停时，螺旋桨 i 的转速平衡点

为 $\omega_i^* = \omega_0^*$ ，油门指令的平衡点为 $\sigma_i^* = \sigma_0^*$ ，反扭力

矩的平衡点为 $M_i^* = M_0^*$ ，拉力的平衡点为 $T_i^* = T_0^*$ ，

姿态角、速度的平衡点为0，位置的平衡点为 \mathbf{p}_d 。

我们进一步研究一下，在该平衡点下的线性化控制模型。

基于平衡态，我们进一步可以得到平衡状态的摄动

$$\Theta = \mathbf{0} + \Delta\Theta$$

$$\omega = \mathbf{0} + \Delta\omega$$

$$\omega_i^* = \omega_0^* + \Delta\omega_i$$

$$\sigma_i = \sigma_0^* + \Delta\sigma_i$$

$$M_i = M_0^* + \Delta M_i$$

$$T_i = T_0^* + \Delta T_i$$

其中 $\Delta\Theta, \Delta\omega$ 分别表示欧拉角和机体转速的变化；

$\Delta\omega_i, \Delta\sigma_i, \Delta M_i, \Delta T_i$ 分别表示转速，油门指令，反扭力矩和拉力的变化。



分析实验

□ 实验步骤

根据“动力单元模型”，我们有

$$\Delta \varpi_i = \frac{1}{T_m s + 1} C_R \Delta \sigma_i$$

根据牛顿第三定律，反扭矩的大小与电机作用在螺旋桨*i*上的力矩大小相同，为

$$M_i = c_M \varpi_i^2 + J_{RP} \dot{\varpi}_i$$

单个螺旋桨提供的拉力为

$$T_i = c_T \varpi_i^2$$

反扭矩的摄动和拉力可以写为

$$\Delta T_i = 2c_T \Delta \varpi_i \varpi_i^*$$

$$\Delta M_i = 2c_M \varpi_i^* \Delta \varpi_i + J_{RP} \Delta \dot{\varpi}_i$$

$$\text{进一步 } \Delta T_i = \frac{C_R 2c_T \varpi_0^*}{T_m s + 1} \Delta \sigma_i, \Delta M_i = \frac{C_R (2c_M \varpi_0^* + J_{RP} s)}{T_m s + 1} \Delta \sigma_i$$

拉力和力矩摄动模型进一步可以写为

$$\Delta f = \frac{C_R 2c_T \varpi_0^*}{T_m s + 1} (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3 + \Delta \sigma_4)$$

$$\Delta \tau_x = \sqrt{2} d \frac{C_R c_T \varpi_0^*}{T_m s + 1} (-\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3 - \Delta \sigma_4)$$

$$\Delta \tau_y = \sqrt{2} d \frac{C_R c_T \varpi_0^*}{T_m s + 1} (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3 - \Delta \sigma_4)$$

$$\Delta \tau_z = \frac{C_R (2c_M \varpi_0^* + J_{RP} s)}{T_m s + 1} (\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 - \Delta \sigma_3 - \Delta \sigma_4)$$



分析实验

□ 实验步骤

位姿运动学摄动模型分析

在平衡点处对位置模型进行线性化

$$\begin{bmatrix} \Delta p_x \\ \Delta p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{g}{s^2} \Delta \theta \\ \frac{g}{s^2} \Delta \phi \end{bmatrix}$$

$$\Delta p_z = -\frac{\sum \Delta T_i}{ms^2}$$

则位置动力学摄动模型的传递函数为：

$$\Delta p_x = -\sqrt{2}g \frac{dC_R c_T \varpi_0^*}{J_y} \frac{1}{s^4} \frac{1}{T_m s + 1} \Delta \bar{\tau}_y$$

$$\Delta p_y = \sqrt{2}g \frac{dC_R c_T \varpi_0^*}{J_x} \frac{1}{s^4} \frac{1}{T_m s + 1} \Delta \bar{\tau}_x$$

$$\Delta p_z = -\frac{2C_R c_T \varpi_0^*}{ms^2 (T_m s + 1)} \Delta \bar{\tau}$$

其中 $\Delta \bar{\tau} = \Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3 + \Delta \sigma_4$



分析实验

□ 实验步骤

(3) 步骤三：分析理论推导与基础实验的一致性

1) 分析偏航角变化率响应

偏航角变化率的传递函数如下

$$\Delta\dot{\psi}(s) = \frac{C_R (2c_M \omega_0^* + J_{RP} s)}{J_z} \frac{1}{s} \frac{1}{T_m s + 1} \Delta\bar{\tau}_z$$

可知当增大油门到电机稳态转速参数 C_R ，螺旋桨力矩系数 c_M ，平衡点处的螺旋桨转速 ω_0^* 时，偏航角速率响应变快。增大电机响应时间常数 T_m ， $o_b z_b$ 轴转动惯量 J_z 偏航角度率响应变慢。

这与基础实验的结论相同。



分析实验

□ 实验步骤

2) 分析高度响应

高度的传递函数如下

$$\Delta p_z = -\frac{2C_R c_T \omega_0^*}{ms^2(T_m s + 1)} \Delta \bar{\tau}$$

可知当增大螺旋桨推力系数 c_T 、油门到电机稳态转速参数 C_R ，高度变高。增大质量 m ，高度响应变慢。相应的仿真实验可以留给读者验证。



设计实验

□ 实验目标

■ 已知

MATLAB 2017b或以上版本，第五章设计的多旋翼模型，多旋翼飞行评估网站 <https://flyeval.com/paper/> 提供的模型参数。

■ 目标

(1) 目标一：在MATLAB/Simulink上建立完整的多旋翼飞行器模型。在姿态模型方面，可以采用四元数模型、旋转矩阵模型，或者欧拉角模型；

(2) 目标二：在FlightGear中添加四旋翼的三维模型。



设计实验

□ 实验目标一：在MATLAB/Simulink中搭建完整的多旋翼模型

(1) 步骤一：动力单元模块设计

对 $\omega = \frac{1}{T_m s + 1} \omega_{ss}$ 令状态变量 $x = T_M \omega$, 输入 $u = \omega_{ss}$ 输出 $y = \omega$, 则有:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{T_m} x + u \\ y = \frac{1}{T_m} x \end{cases}$$

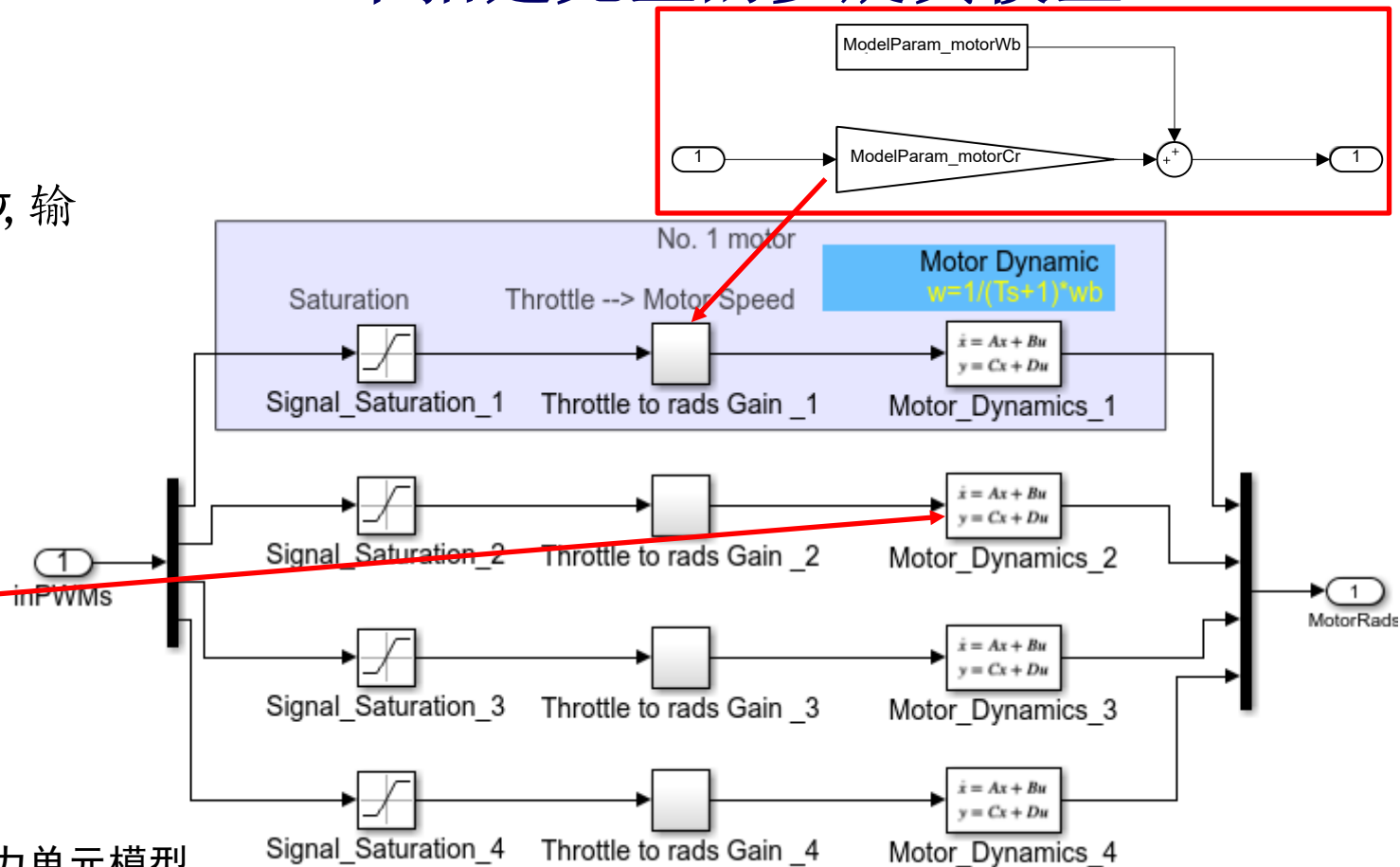


图. 动力单元模型



设计实验

□ 实验目标一：在MATLAB/Simulink中搭建完整的多旋翼模型

(2) 步骤二：控制效率模块

由式

$$f = \sum_{i=1}^4 T_i = c_T (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$$

$$\tau_x = dc_T \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \omega_1^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_2^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_3^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_4^2 \right)$$

$$\tau_y = dc_T \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \omega_1^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_2^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_3^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_4^2 \right)$$

$$\tau_z = c_M (\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 - \omega_4^2)$$

可得螺旋桨产生的力和力矩，并加入空气阻力和力矩，“控制效率模块”搭建如右所示框图。

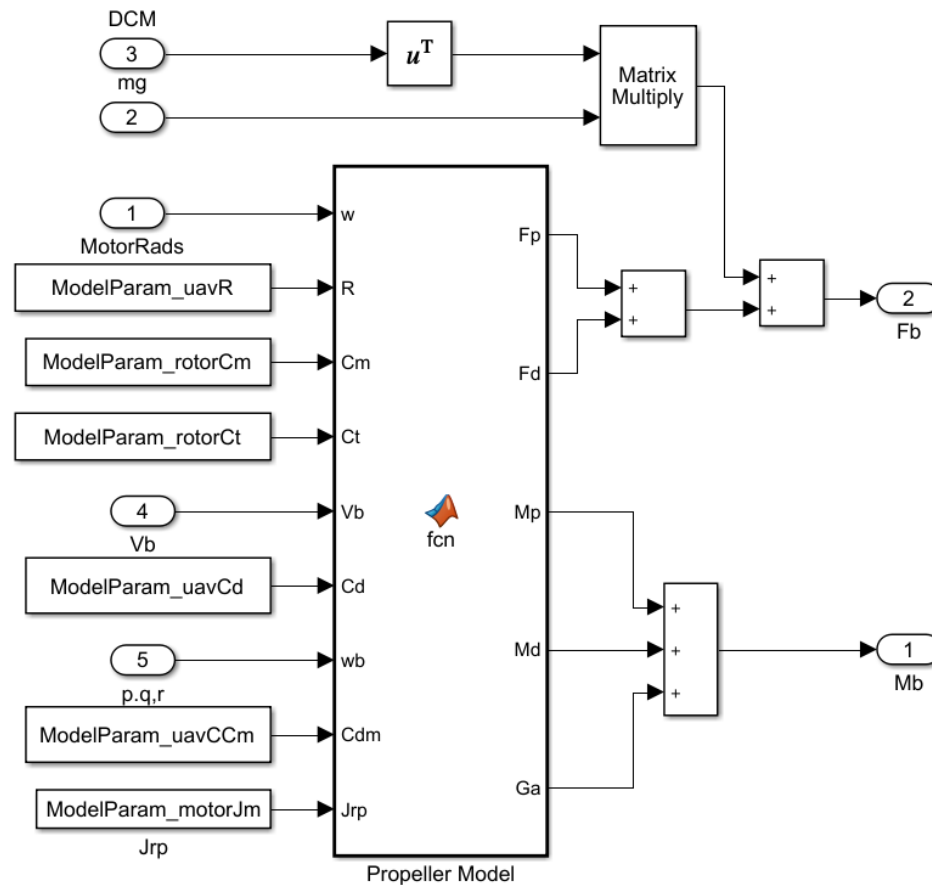


图. 控制效率模型



设计实验

实验目标一：在MATLAB/Simulink中搭建完整的多旋翼模型

(3) 步骤三：刚体动力学模块设计

根据式

$$\mathbf{J} \cdot {}^b \dot{\boldsymbol{\omega}} = - {}^b \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}) + {}^b \mathbf{M}$$

$${}^b \dot{\mathbf{v}} = - \begin{bmatrix} {}^b \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}_x {}^b \mathbf{v} + {}^b \mathbf{F}/m$$

搭建姿态动力学模型和运动动力学模型

如右图所示。

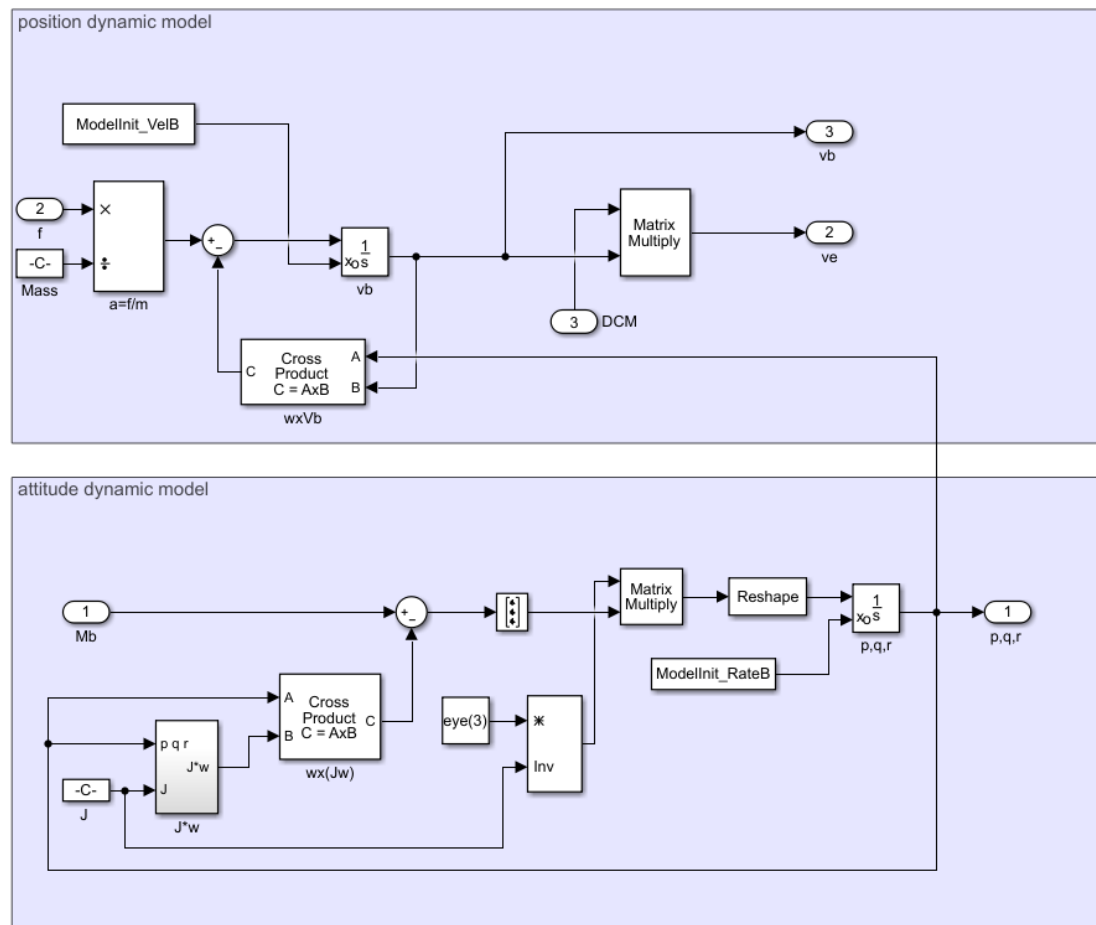


图. 位置动力学模块和姿态动力学模块



设计实验

□ 实验目标一：在MATLAB/Simulink中搭建完整的多旋翼模型

(4) 步骤四：刚体运动学模块

根据式

$${}^e \dot{\mathbf{p}} = {}^e \mathbf{v}$$

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_v^T \cdot {}^b \boldsymbol{\omega}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_v = \frac{1}{2} \left(q_0 \mathbf{I}_3 + [\mathbf{q}_v]_{\times} \right) {}^b \boldsymbol{\omega}$$

搭建刚体动力学模型，如右图所示。

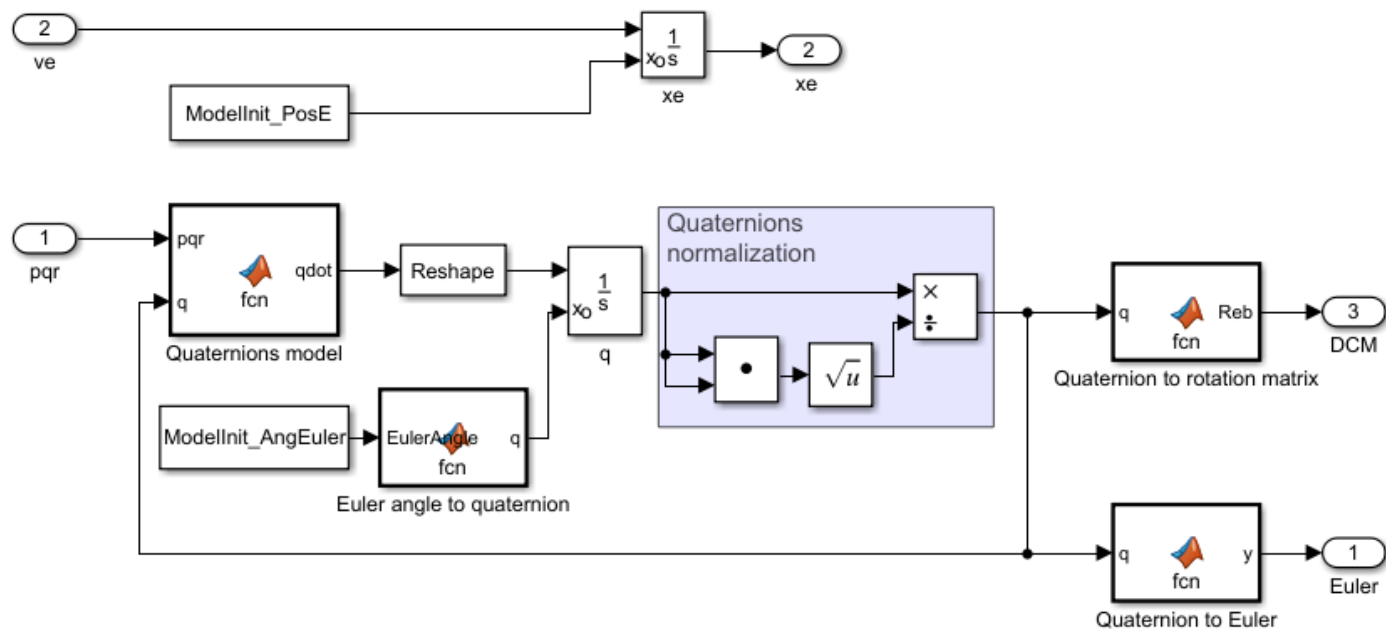


图. 姿态运动学模块



设计实验

□ 实验目标一：在MATLAB/Simulink中搭建完整的多旋翼模型

(5) 模型建立

将上述模型封装成子模块，刚体控制模块、动力单元模块和控制效率模块连接情况如右图所示。

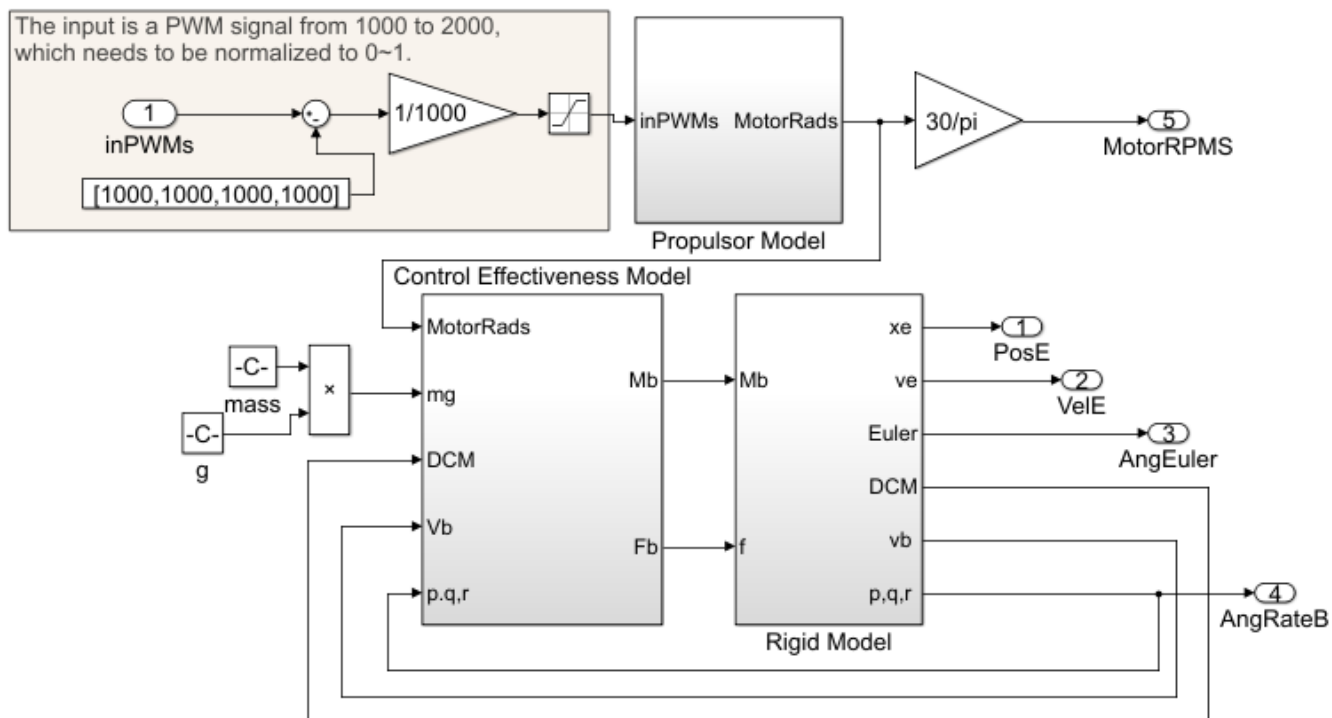


图. 刚体控制模块、动力单元模块和控制效率模块连接情况



设计实验

□ 实验目标二：在FlightGear中添加四旋翼的三维模型

(1) 步骤一：建立三维模型

■ 使用AC3D软件绘制四旋翼模型。绘制简单的示意模型，如下图所示。

■ 螺旋桨位置参数如下表所示。

表. 螺旋桨位置参数

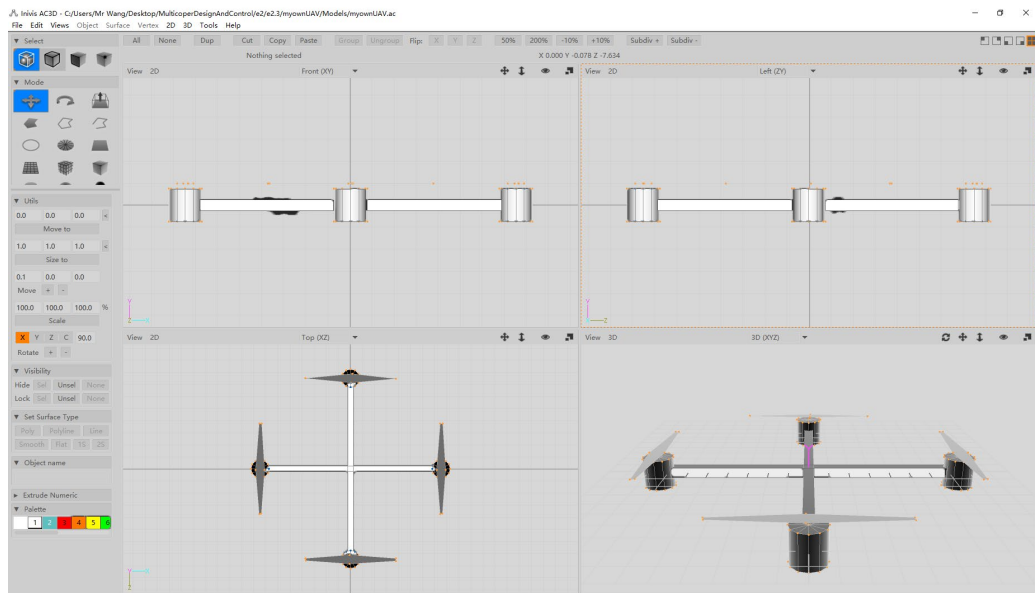


图. 四旋翼示意模型

螺旋桨名称	坐标		
	X	Y	Z
propeller1	0	7.5	1
propeller2	7.5	0	1
propeller3	0	-7.5	1
propeller4	-7.5	0	1



设计实验

□ 实验目标二：在FlightGear中添加四旋翼的三维模型

(2) 配置参数

编写myownUAV-set.xml配置文件和myownUAV.xml文件

```
1 <?xml version="1.0"?>
2 <PropertyList>
3   <sim>
4     <description>myownUAV</description>
5     <flight-model>network</flight-model>
6     <model>
7       <path>Aircraft/myownUAV/Models/myownUAV.xml</path>
8     </model>
9     <chase-distance-m type="double"> -40</chase-distance-m>
10    <current-view>
11      <view-number type="int">2</view-number>
12    </current-view>
13  </sim>
14 </PropertyList>
```

myownUAV-set.xml

```
1 <?xml version="1.0"?>
2 <PropertyList>
3   <path>myownUAV.ac</path>
4   <animation>
5     <type>spin</type>
6     <object-name>propeller1</object-name>
7     <property>/engines/engine[0]/rpm</property>
8     <factor>-1</factor>
9     <center>
10      <x-m>0</x-m>
11      <y-m>7.5</y-m>
12      <z-m>1</z-m>
13    </center>
14    <axis>
15      <x>0.0</x>
16      <y>0.0</y>
17      <z>1.0</z>
18    </axis>
19  </animation>
20  ...
21 </PropertyList>
```

myownUAV.xml



设计实验

□ 实验目标二：在FlightGear中添加四旋翼的三维模型

(3) 步骤三：放置模型和配置文件
建立文件夹myownUAV

Models	2019/2/20 20:11	文件夹	
myownUAV-set.xml	2018/12/14 15:39	XML 文档	1 KB
myownUAV.ac	2018/10/11 15:45	AC3D geometry	14 KB
myownUAV.xml	2018/12/14 15:11	XML 文档	2 KB

将整个文件复制到FlightGear安装路径下的“\data\Aircraft”文件夹下。



设计实验

□ 实验目标二：在FlightGear中添加四旋翼的三维模型

(4) 步骤四：使用MATLAB驱动FlightGear

在运行FlightGear之前，要先双击“Generate Run”模块，打开后设置脚本名称、FlightGear位置、模型名称、端口、飞行机场背景等以后，点击“Generate Script”在MATLAB工作目录下生成一个脚本，使用文本编辑器打开脚本，做如下修改：

① -start-date-lat 后面的时间改为2004:06:01:01:00:00

②找到“freeze”，将前面的“enable”改为“disable”。修改完成后，运行这个脚本，如何对MATLAB进行仿真即可实现MATLAB动力学模型驱动FlightGear三维模型飞行。

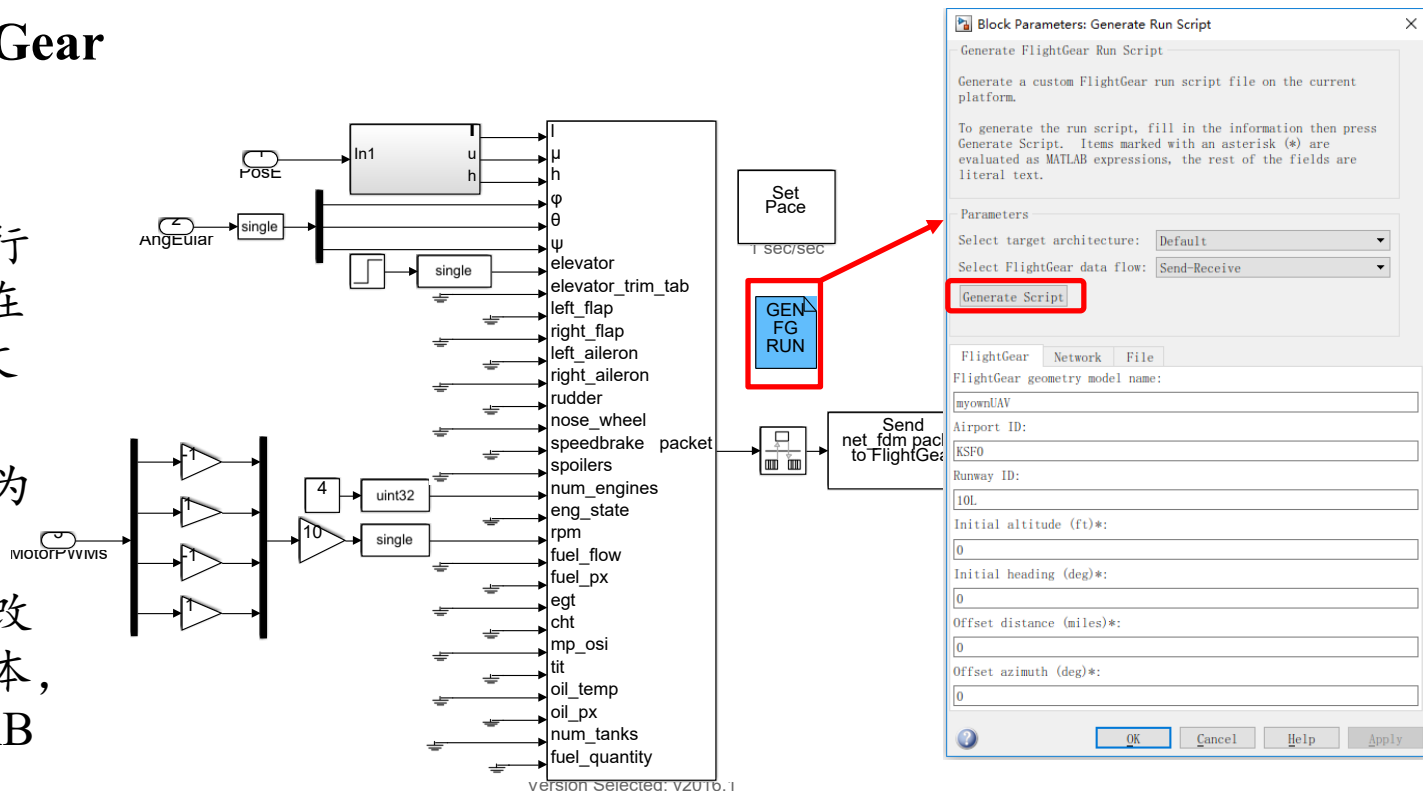


图. FlightGear参数配置



设计实验

□ 注意事项

如FlightGear中显示的背景昏暗，或者需要调节多视野，可在FlightGear软件中进行设置。选择菜单栏“Environment”，在下拉菜单中选择“Time Setting”，可以看到右图所示画面，在右侧选择时间为“noon”。

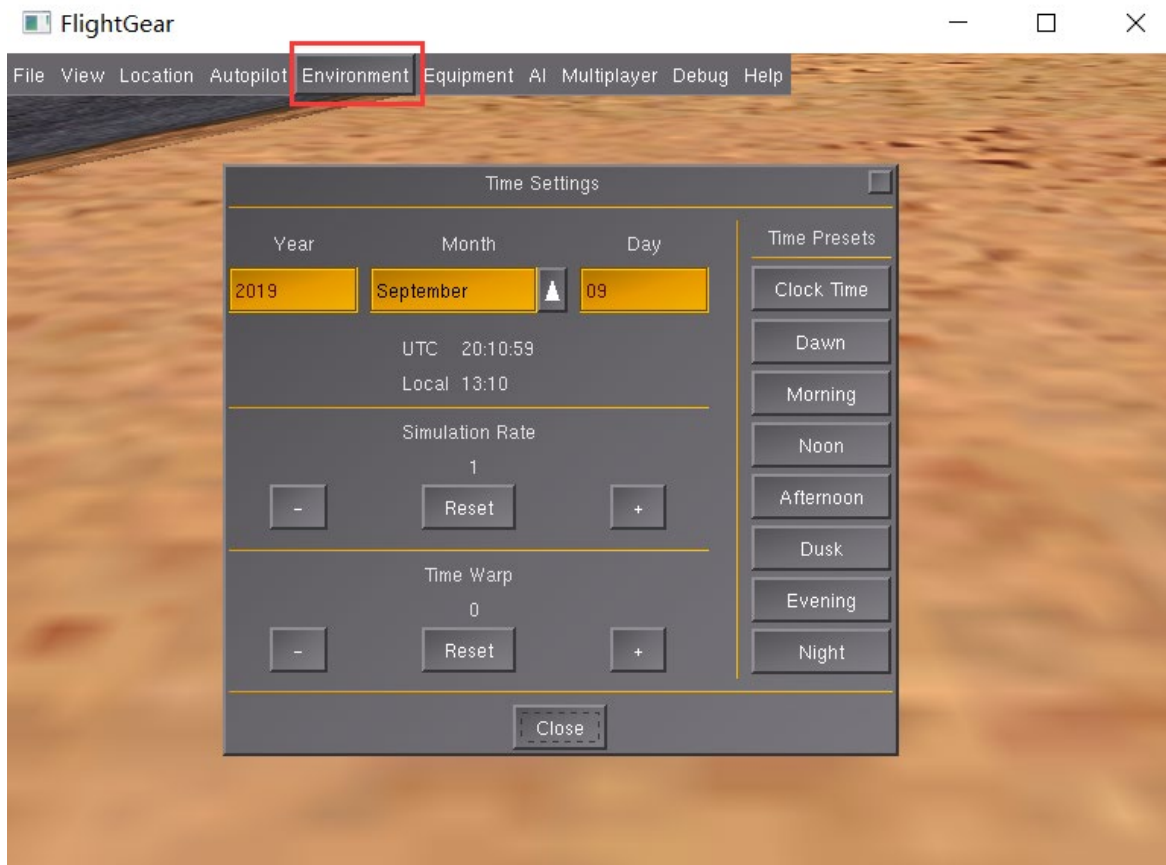


图. FlightGear中设置时间



设计实验

□ 注意事项

在菜单中选择“View”，
然后选择“Adjust View
Position”，如右图所示。调节
图中三个标志即可调节观察多旋
翼的角度和远近。



图. FlightGear中设置视野



小结

(1) 多旋翼的刚体模型可分为刚体运动学模型、刚体动力学模型、控制效率模型和动力单元模型。

(2) 运动学与质量和受力无关，输入为速度、角速度，输出为位置和姿态。动力学建模既涉及力又涉及运动，使用牛顿第二定律及欧拉方程，并考虑到机体坐标系和地球坐标系间的旋转矩阵。

(3) 在多旋翼悬停的平衡点附近时，俯仰角和滚转角都很小，进行线性化处理，可大大简化模型中的方程。本实验分析了不同参数对偏航角速度和高度的影响，结论与基础实验一致。

(4) 后续的控制相关实验（第九章和第十章的实验）要基于本章建立的模型。

如有疑问，请到<https://rflysim.com>查询更多信息。



资源

- 本课程的所有课件、视频和源码将会发布在官方网站：<https://rflysim.com/zh>
- 更详细的内容可以参考我们的教材：全权, 戴训华, 王帅著. 《多旋翼飞行器设计与控制实践》. 北京: 电子工业出版社. 2020
- 扫二维码关注可靠飞行控制研究组公众号 **buarfly** (文章、资讯等)
- 多旋翼控制实践课程交流QQ群: **951534390** (答疑、资料分享等)
- 如果遇到任何问题, 也可以在我们的Github页面查找答案或提问
<https://github.com/RflySim/RflyExpCode/issues>
- 针对无人机/无人车的视觉/集群/AI等顶层控制算法的快速开发与验证, RflySim同时推出了高级版平台和课程, 请访问我们的网站了解更多
https://rflysim.com/zh/4_Pro/Advanced.html
- 我们的官方联系邮箱是: rflysim@163.com





致谢

感谢控制组同学



王帅



宁俊清

为本门课程准备做出的贡献



谢谢!